MA2 – „písemná" přednáška 6. 5. 2020

V dnešní „přednášce" upřesníme definici křivky a vyšetříme existenci a vlastnosti křivkových integrálů (skalární i vektorové) a ukážeme si „návod" na výpočet těchto křivkových integrálů, a samozřejmě i příklady výpočtů křivkových integrálů. Abychom mohli pojem křivkového integrálu upřesnit, musíme nejprve definovat křivku v R^2 (resp. R^3) (zatím jsme pracovali spíše jen s představou křivky) a pak už budeme moci formulovat „přesně" i existenci a vlastnosti křivkových integrálů, a definice „křivky" nám pak také ukáže cestu k výpočtu křivkových integrálů pomocí integrálu Riemannova (Newtonova).

Tedy:

Křivka v $R^3(R^2)$ (volíme zde jednodušší definici, co „nejblíže" naší představě křivky – řada definic je obecnějších):

Definice: Křivka K je množina bodů v $R^3(R^2)$

$$K = \{ X \in R^3(R^2) \; ; \; X = \vec{r}(t),\ t \in \langle a, b \rangle \ (= \mathcal{I}) \},$$ kde

1) $\vec{r}(t) \ (= (x(t), y(t), z(t)))$ je spojitá vektorová funkce v $\mathcal{I}$;

2) existuje $\vec{r}\,'(t) (= (x'(t), y'(t), z'(t)))$ spojitá v $\mathcal{I}$ až na konečný počet bodů (tj. $\vec{r}\,'(t)$ je spojitá v $\mathcal{I} \setminus M$, kde M je konečná množina) a v bodech nespojitosti existují vlastní jednostranné limity funkce $\vec{r}\,'(t)$;

3) $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{o}$ v $\mathcal{I}$ až na konečný počet bodů z $\mathcal{I}$ (tj. křivka K „má" (až na konečný počet bodů) tečný vektor)

a názvosloví":

"Křivka K (z definice) se nazývá křivka po částech hladká.

Zobrazení $\vec{r} : t \in \mathcal{I} \rightarrow R^3(R^2)$ (z definice) – parametrizace křivky K."

a speciální (užitečné) druhy křivek

$$K = \{ X \in R^3(R^2) \, ; \, X = \vec{r}(t), \, t \in \langle a,b \rangle \} :$$

1) K – křivka hladká, když $\vec{r}\,'(t)$ je spojitá v $\langle a,b \rangle$ a $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{o}$ v $\langle a,b \rangle$ (tj. v každém bodě má křivka tečný vektor);

2) K – jednoduchý oblouk, když K je hladká křivka a zobrazení $\vec{r}(t)$ (tj. parametrizace) je funkce prostá v $\langle a,b \rangle$ (tj. pro $\forall t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in \langle a,b \rangle$ je $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$, tedy křivka K "neprotíná" sama sebe) – krátce se říká "jen oblouk";

3) K – jednoduchá uzavřená křivka, když $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, K je hladká křivka a parametrizace $\vec{r}(t)$ je zobrazení prosté v $\langle a, b)$:

Příklady křivek (a jejich parametrizací):

1) úsečka v R^3 s krajními body $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$:

$$\vec{r}(t) = A + t(B - A) \, , \, t \in \langle 0,1 \rangle \, ; \qquad (A \neq B)$$

$$\vec{r}\,'(t) = (B - A) \qquad , \, t \in \langle 0,1 \rangle$$

„Rozepsáno": $$\begin{aligned} x &= a_1 + t(b_1-a_1) \\ y &= a_2 + t(b_2-a_2) \qquad , \ t\in\langle 0,1\rangle \\ z &= a_3 + t(b_3-a_3) \end{aligned}$$

a „tečný" vektor $\vec{r}\,'(t) = B-A = (b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$;

2) <u>kružnice o středu v bodě $O[0,0]$ a poloměru $R>0$:</u>

$$\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t) \ , \ t\in\langle 0,2\pi\rangle$$
$$\vec{r}\,'(t) = (-R\sin t, R\cos t) \ , \ t\in\langle 0,2\pi\rangle$$

tj. dle definice – příklad (hladké) jednoduché uzavřené křivky ;

3) <u>graf funkce $y=f(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$:</u>

$$\vec{r}(t) = (t, f(t)) \ , \ t\in\langle a,b\rangle$$ (také lze užít označení parametru „přímo" $x\in\langle a,b\rangle$)

a ex.-li $f'(t)$ v $\langle a,b\rangle$, pak

$$\vec{r}\,'(t) = (1, f'(t)) \ , \ t\in\langle a,b\rangle \ , \text{ tj. } \vec{r}\,'(t)\neq\vec{o}$$

a pro $t_1\neq t_2$, $t_1,t_2\in\langle a,b)$ atd. $\Rightarrow (t_1,f(t_1))\neq(t_2,f(t_2))$,

tj. graf funkce, mající derivaci v $\langle a,b\rangle$, je příklad jednoduchého oblouku (v R^2) ;

4) <u>dodatek k příkladu 2)</u> – (omlouvám se za opakování)

a) <u>parametrizace kružnice o středu $S[s_1,s_2]$ a poloměru R :</u>

$$\vec{r}(t) = (s_1+R\cos t, s_2+R\sin t) \ , \ t\in\langle 0,2\pi\rangle$$

b) je-li $t\in\langle 0,6\pi\rangle$ pro $\vec{r}(t) = (s_1+R\cos t, s_2+R\sin t)$, pak kružnici jsme „oběhli" třikrát ;

c) parametrizace elipsy o rovnici $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>0, b>0$:

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, b\sin t), \quad t\in\langle 0,2\pi\rangle$$

$$\vec{r}\,'(t) = (-a\sin t, b\cos t), \quad t\in\langle 0,2\pi\rangle$$ (tečný vektor k elipse v bodě $X=(a\cos t, b\sin t)$)

- opět jednoduchá uzavřená křivka;

5) šroubovice v R^3:

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \quad t\in\langle 0,6\pi\rangle$$

(„tři závity") ($a>0, b>0$)

$$\vec{r}\,'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b) \neq \vec{o} \text{ v } \langle 0,6\pi\rangle$$

- hladká křivka, oblouk;

Pro křivkový integrál vektorové funkce jsme potřebovali „cestu" – tj. křivku, po které počítáme integrál, práci pole, orientovat – nejčastěji:

Orientace křivky $\vec{K}$, daná parametrizací:

je-li $K=\{X\in R^3(R^2);\ X=\vec{r}(t), t\in\langle a,b\rangle\}$, pak počáteční bod K (p.b.K) je $A=\vec{r}(a)$ a koncový bod K (k.b.K) je $B=\vec{r}(b)$.

Říkáme také, že $\vec{K}$ je orientovaná souhlasně s parametrizací.

Křivku K, opačně orientovanou, než je $\vec{K}$, budeme značit $\dot{-}\vec{K}$

(tj. p.b.$\vec{K}$ = k.b.$(\dot{-}\vec{K})$ a k.b.$\vec{K}$ = p.b.$(\dot{-}\vec{K})$)

(tečný vektor $\vec{r}(t)\neq\vec{o}$ pak udává „směr pohybu" po $\vec{K}$).

Ještě jedno užitečné značení:

Máme-li křivky $\vec{K}_1$ a $\vec{K}_2$ (tj. orientované křivky) takové, že k.b. $\vec{K}_1$ = p.b. $\vec{K}_2$, pak budeme značit křivku $\vec{K}$, kterou „dostaneme" sjednocením množin bodů křivek $\vec{K}_1, \vec{K}_2$ tak, že p.b. $\vec{K}$ = p.b. $\vec{K}_1$ a k.b. $\vec{K}$ = k.b. $\vec{K}_2$ takto:

$$\vec{K} = \vec{K}_1 \dotplus \vec{K}_2 \qquad (K = K_1 \cup K_2)$$

A nyní už můžeme ukázat, jak vyjádřit křivkový integrál $\int_K f\,ds$ pomocí parametrizace křivky K – nejprve integrál skalární:

Nechť K je hladká křivka (spec. oblouk, nebo jednoduchá uzavřená)

a $X = \vec{r}(t)$, $t \in \langle a,b\rangle$ její parametrizace; pak na K je

$$f(X) = f(\vec{r}(t)), \quad t \in \langle a,b\rangle \quad \text{(funkce jedné proměnné)}$$

a potřebujeme vyjádřit ještě „ds" užitím parametrizace –

– zkusme „jednodušše" (Newtonovsky):

v R^2 (a analogicky i v R^3) je $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

a je-li $x = x(t)$, $y = y(t)$, pak $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt =$

$(dx = x'(t)\,dt,\ dy = y'(t)\,dt)$ $= \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$

a tedy

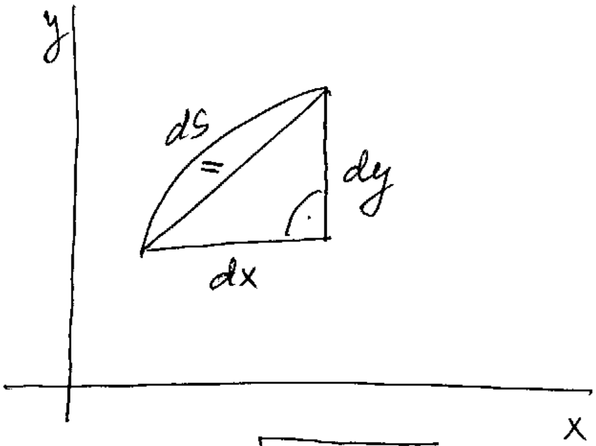
$$\int_K f\,ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt \qquad (*)$$

Poznámky:

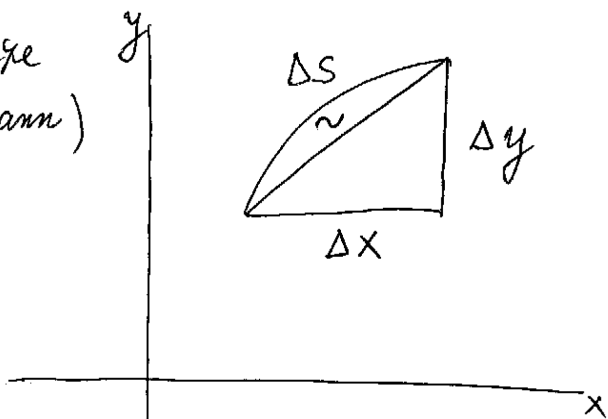
1) Opět se tedy „povedlo" přenést výpočet křivkového integrálu na integrál Riemannův pro funkce jedné proměnné – – parametrizací se vlastně jakoby ten drát zakřivený (z minulé přednášky) „narovná" a je z drátu „úsečka" („pro integraci nejlepší").

2) Vzorec (*) se podobá vzorci pro substituci, jen derivace $\vec{r}\,'(t)$ je zde v „normě"! (snad se vzorec bude dobře pamatovat).

3) Odvození vzorce (*) pro výpočet $\int_k f\,ds$ v přístupu Riemannovském k definici křivkového integrálu je matematicky náročnější, snad nevadí ten jednodušší přístup – „ds" se zde vyjadřuje jako nekonečně krátká rovná část křivky (úsečka) a její délka je vlastně dána Pythagorovou větou – „zřejmě":



lépe (Riemann)



$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} \quad \longleftarrow \quad \Delta s \cong \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

v limitě pro $\nu(D) \to 0$

$$\int_K f\,ds \quad \xleftarrow{a} \quad \sum_i f(\tilde{X}_i)\,\Delta_i s$$

A vraťme se zpět k $\int_K f\,ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$,

kde $X=\vec{r}(t)$, $t\in\langle a,b\rangle$ je parametrizace křivky K,
$K\subset\omega\subset R^3(R^2)$ a f je def. v ω:

Pak speciálně: <u>délka křivky K</u> je dána

$$S(K)=\int_K ds = \int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$$

<u>a je-li $\int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt \left(= \int_K ds\right)$ konečný, křivka K</u>

se nazývá <u>měřitelná křivka</u> (neb křivka konečné délky);

Tedy např. jednoduchý oblouk, jednoduchá uzavřená křivka, hladká křivka jsou křivky konečné délky, tj. měřitelné.

To, že se „povedlo" díky parametrizaci křivky K převést výpočet $\int_K f\,ds$ na výpočet (R) $\int_a^b f(\vec{r}(t))\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$, nám už umožní vyslovit „pravidla" pro existenci $\int_K f\,ds$, vlastnosti tohoto integrálu, stejně tak i $\int_{\vec{K}} \vec{f}\,d\vec{r} = \int_K \vec{f}\cdot\vec{\tau}\,ds$, neboť parametrizací je dán i $\vec{\tau}$, pokud je $\vec{r}\,'(t)\neq\vec{o}$ – dříve, než tak učiníme, je důležité ukázat jistě jednu věc – že $\int_K f\,ds$ je t.zv.

! <u>nezávislý na parametrizaci křivky K</u>

(křivku K lze obecně parametrizovat nekonečně mnoha způsoby, když už máme K parametrizovanou)

$\int_K f\,ds$ by měl být „dán" jen křivkou K (tj. množinou bodů křivky K v $R^3(R^2)$) a hodnotami fce f, nikoliv tím, jak křivku K „vyjádříme" pomocí parametrizace – brzy si to ukážeme, že při „povolených" změnách parametrizace hodnota $\int_K f\,ds$ se nezmění (četba je „nepovinná", ale měli bychom si to uvědomit)

Nezávislost křivkového integrálu $\int_K f\,ds$ na parametrizaci K:

a) „přípustné" změny parametrizace:

K – hladká křivka, a $X = \vec{r}_1(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ je parametrizace K; nechť $t = \varphi(u)$, $u \in \langle \alpha, \beta\rangle$ } pak

$X = \vec{r}_1(\varphi(u)) = \vec{r}_2(u)$, $u \in \langle \alpha, \beta\rangle$ – a otázka:

tedy je $\vec{r}_2(u)$ též parametrizací K? Když

1) $\varphi(u)$ zobrazuje $\langle \alpha, \beta\rangle$ na $\langle a, b\rangle$ ($\varphi(\langle \alpha, \beta\rangle) = \langle a, b\rangle$) φ je spojitá v $\langle \alpha, \beta\rangle$

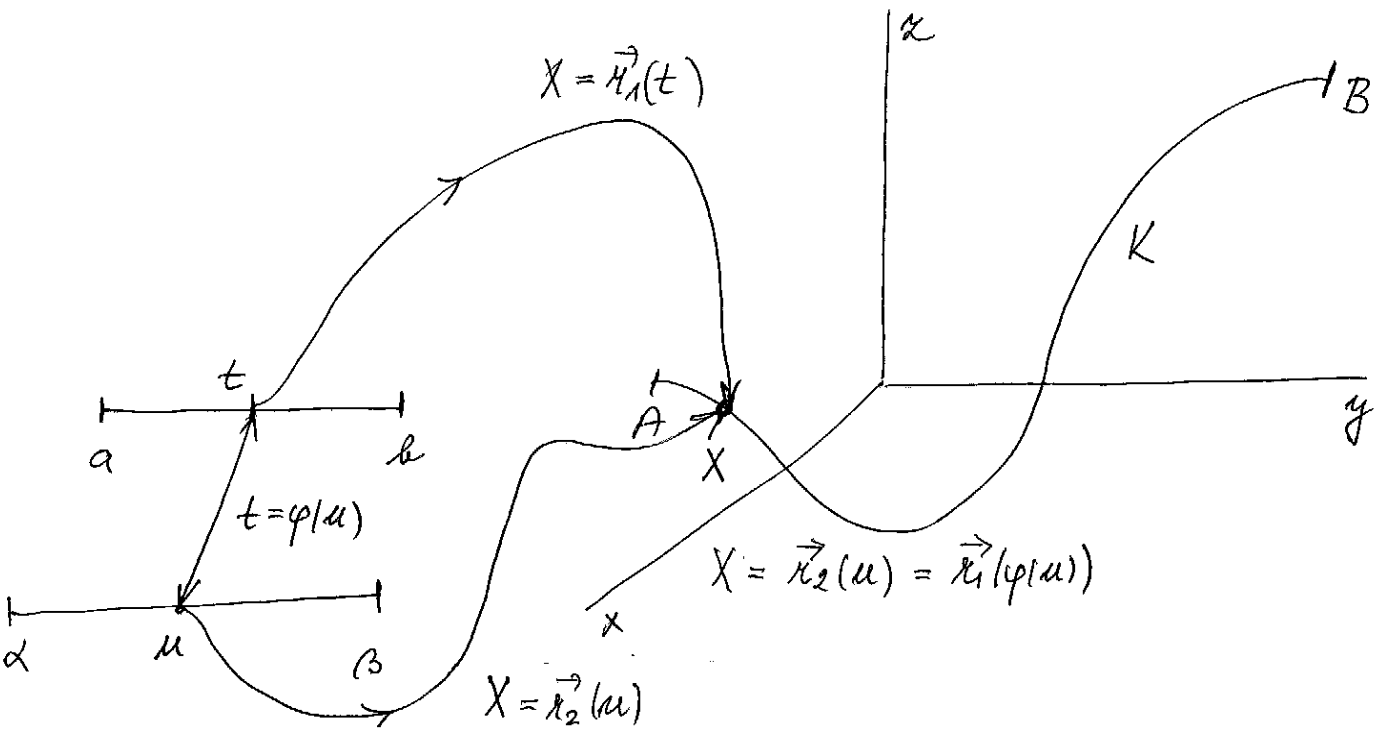
2) existuje $\varphi'(u) \neq 0$ v $\langle \alpha, \beta\rangle$, $\varphi'(u)$ je spojitá v $\langle \alpha, \beta\rangle$ (tedy, jak víme, φ' nemění znaménko v $\langle \alpha, \beta\rangle$ a tedy $\varphi(u)$ je ryze monotonní v $\langle \alpha, \beta\rangle$),

pak $\vec{r}_2(u) = \vec{r}_1(\varphi(u))$ je vektorová funkce, spojitá v $\langle \alpha, \beta \rangle$

a $\vec{r}_2{}'(u) = \left(\vec{r}_1(\varphi(u))\right)' = \vec{r}_1{}'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) \neq \vec{o}$ v $\langle \alpha, \beta \rangle$

a spojitá v $\langle \alpha, \beta \rangle$,

tedy $\underline{\vec{r}_2(u) \text{ je parametrizací křivky } K}$;



<u>Navíc</u> - jak je to s orientací, která je dána parametrizací u $\vec{K}$:

je-li $\vec{K}$ - orientovaná parametrizací $X = \vec{r}(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$
(p.b. $\vec{K} = \vec{r}(a)$, k.b. $\vec{K} = \vec{r}(b)$),

pak, je-li $\varphi'(u) > 0$ v $\langle \alpha, \beta \rangle$, je $\vec{K}$ orientovaná shodně parametrizací $\vec{r}_2(u)$ s orientací právě $\vec{r}_1(t)$,

je-li $\varphi'(u) < 0$ v $\langle \alpha, \beta \rangle$ je pak $\vec{K}$ parametrizací $\vec{r}_2(u)$ orientovaná opačně, než při $\vec{r}_1(t)$.

b) nezávislost integrálu $\int_k f\,ds$ na parametrizaci křivky K:

(i) ukažme si nejprve, že délka křivky (tj. výpočet délky K) je na parametrizaci nezávislý:

$$l = \int_K ds \quad \text{(dle definice)}$$ a je-li

$X = \vec{r}_1(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, pak $l = \int_a^b \|\vec{r}_1{}'(t)\|\,dt$, a pro

$X = \vec{r}_2(u) = \vec{r}_1(\varphi(u))$ pak by mělo být též ($u \in \langle \alpha, \beta\rangle$)

$$l = \int_\alpha^\beta \|\vec{r}_2{}'(u)\|\,du = \int_\alpha^\beta \|\vec{r}_1{}'(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)\|\,du = \int_\alpha^\beta \|\vec{r}_1{}'(\varphi(u))\|\cdot|\varphi'(u)|\,du =$$

předpokládejme (BÚNO) $\varphi'(u) > 0$ v $\langle \alpha, \beta\rangle$

$$= \left|\begin{array}{l} \varphi(u) = t \\ \varphi'(u)du = dt \\ u = \alpha \to t = \varphi(\alpha) = a \\ u = \beta \to t = \varphi(\beta) = b \end{array}\right| \underset{VS}{=} \int_a^b \|\vec{r}_1{}'(t)\|\,dt \quad \text{(cbd.)}$$

(ii) analogicky se ukáže užitím věty o substituci v určitém integrálu pro přípustné změně parametrizace K, že

$$\int_K f\,ds = \int_a^b f(\vec{r}_1(t))\,\|\vec{r}_1{}'(t)\|\,dt = \int_\alpha^\beta f(\vec{r}_2(u))\,\|\vec{r}_2{}'(u)\|\,du$$

(tj. integrál $\int_k f\,ds$ je nezávislý na parametrizaci)

A dále – výpočet křivkového integrálu vektorové funkce $\vec{f}$ (užitím parametrizace křivky)

Uvažujme hladkou křivku $K \subset R^3(R^2)$, jejíž parametrizace je dána $X = \vec{r}(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, a nechť $\vec{f}$ je vektorové pole, definované v $\omega \subset R^3(R^2)$, $K \subset \omega$, K je souhlasně orientovaná s parametrizací. Pak připomínáme, že

$$\int_{\vec{K}} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_K \vec{f} \cdot \vec{\tau} \, ds \quad , \text{ kde } \vec{\tau} \text{ je tečný vektor ke } K, \ \|\vec{\tau}\| = 1 \ ;$$

Je-li K hladká křivka, pak $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{o}$ v $\langle a, b \rangle$ a tečný vektor $\vec{\tau}(\vec{r}(t)) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$, $t \in \langle a, b \rangle$; pak

$$\int_{\vec{K}} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{\tau}(\vec{r}(t)) \, \|\vec{r}\,'(t)\| \, dt =$$

$$= \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|} \|\vec{r}\,'(t)\| \, dt, \text{ tedy}$$

$$\boxed{\int_{\vec{K}} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \underbrace{\vec{r}\,'(t) dt}_{}}$$

($= d\vec{r}$ ve značení „odpovídá“)

Ve fyzice (a i jinde) se často užívá pro křivkový integrál vektoru zápis, kdy $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ a $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$,

$$\int_{\vec{K}} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{K}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$ („rozepsaný" skalární součin $\vec{f} \cdot d\vec{r}$)

Je dobré si pak všimnout, že je zde i přímo „takt" pro výpočet: je-li $X = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ parametrizace K, $t \in \langle a, b \rangle$, pak $d\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t)dt = (x'(t), y'(t), z'(t))dt$

neboť $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$, $dz = z'(t)dt$, tedy snadno „též"

$$\int_{\vec{K}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_a^b \Big(f_1(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + f_2(-\|-) y'(t) + f_3(-\|-) z'(t) \Big) dt$$

si pamatoval, nebo spíše „přepsal" pomocí parametrizace

$$\Big(= \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \underbrace{\vec{r}\,'(t)dt}_{d\vec{r}}$$ – a odtud i „symbolika" $d\vec{r}$ $\Big)$.

A opět je i $\int_{\vec{K}} \vec{f} d\vec{r}$ nezávislý na parametrizaci křivky K – – neboť se „počítá" pomocí křivkového integrálu skaláru.

Ukážeme si teď několik příkladů výpočtu křivkového integrálu skaláru (spec. též délky křivky) a křivkového integrálu fce vektorové, a pak probereme ještě podmínky existence a vlastnosti (ty užitečné a důležité) křivkových integrálů skaláru i vektoru.

Příklady:

1) Výpočet délky křivky, dané parametrizací:

a) délka kružnice o poloměru R ($= 2\pi R$)

K - parametrizace: $X = \vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$$\vec{r}\,'(t) = (-R\sin t, R\cos t),\quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

a tedy $$l = \int_K ds = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= R \cdot \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R \quad (!\ \text{vyšlo})$$

b) délka šroubovice K: $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a>0, b>0$, $t \in \langle 0, 6\pi \rangle$:

$$l = \int_K ds = \int_0^{6\pi} \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_0^{6\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt =$$

$$\left(\vec{r}\,'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b) \right) = \sqrt{a^2+b^2} \int_0^{6\pi} dt = 6\pi\sqrt{a^2+b^2}$$

c) délka křivky, která je částí grafu fce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, mající derivace $f'(x) \in R$ v $\langle a, b \rangle$ (tj. oblouk):

$$\vec{r}(t) = (t, f(t)),\quad t \in \langle a, b \rangle \quad (\text{nebo lze i } \vec{r}(x) = (x, f(x)))$$

$$\vec{r}\,'(t) = (1, f'(t)),\quad t \in \langle a, b \rangle$$

a $$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)}\,dt$$ – „známý" vzorec z aplikací $(R)\int_a^b f(x)\,dx$

$$\left(= \int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt\right).$$

2) <u>Křivkový integrál skaláru</u>

při výpočtu křivkového integrálu je vlastně jen jediný „nový" problém – a to parametrizace zadané křivky; potom už integrál, který dle „vzorce" pro výpočet křivkového integrálu, dostaneme, bychom měli „umět" spočítat (aspoň v „našich" příkladech, obecně – formulovat)

a) $\int\limits_K y\,ds$, kde K je oblouk paraboly $y^2 = x$ mezi body $[1,1]$ a $[4,2]$.

Abychom integrál mohli převést na „obyčejný" integrál určitý, potřebujeme parametrizaci K – je jich asi mnoho (nekonečně), tak zkusme nejjednodušší: je-li $X \in K$, souřadnice x bodu $X = (x,y)$ závisí na y, $x = y^2$, tj. je „dobré" dát: $y = t$ (parametr) a pak $x = t^2$, přičemž y je „od 1 do 2", tj. parametrizace K:

$\vec{r}(t) = (t^2, t)$, $t \in \langle 1,2 \rangle$, nebo, třeba lépe, je to to rozepsat: $x = t^2, y = t$, $t \in \langle 1,2 \rangle$

a pak $\vec{r}\,'(t) = (2t, 1)$, a $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + 1^2} =$

$= \sqrt{1+4t^2}$

<u>Tedy máme:</u>

$$\int\limits_K y\,ds = \int_1^2 t \cdot \sqrt{1+4t^2}\,dt = \left| \begin{array}{l} 1+4t^2 = u \\ 8t\,dt = du \\ t=1 \rightarrow u=5 \\ t=2 \rightarrow u=17 \end{array} \right| \underset{1VS}{=} \frac{1}{8} \int_5^{17} \sqrt{u}\,du = \dots$$

b) $\int\limits_K x^2 ds$, kde K : $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $a>0, b>0$ | $x'(t) = -a\sin t$, $y'(t) = a\cos t$, $z'(t) = b$

(tj. K – jeden „závit" šroubovice)

a tedy $\underline{\int\limits_K x^2 ds} = \int\limits_0^{2\pi} b^2 t^2 \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\, dt = b^2\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi} t^2 dt =$

$$= b^2 \cdot \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \underline{\frac{8\pi^3}{3} b^2\sqrt{a^2+b^2}}$$

3) Křivkový integrál vektoru

a) $\int\limits_{\dot{-}\vec{K}} \vec{f} d\vec{r} = - \int\limits_{\vec{K}} \vec{f} d\vec{r}$ („užitečné" si uvědomit!)

$\vec{K}$: $X = \vec{r}(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ $(a<b)$, hladká křivka (pro jednoduchost) orientace daná parametrizací

$\dot{-}\vec{K}$: $X = \vec{r}(-t) = \vec{r}_1(t)$, $t \in \langle -b, -a\rangle$, — " —

$$\vec{r}_1{}'(t) = \vec{r}\,'(-t)\cdot(-1)$$

a pak: $\underline{\int\limits_{\dot{-}\vec{K}} \vec{f}\cdot d\vec{r}} = \int\limits_{-b}^{-a} \vec{f}(\vec{r}_1(t))\cdot\vec{r}_1{}'(t)dt = - \int\limits_{-b}^{-a} \vec{f}(\vec{r}(-t))\cdot\vec{r}\,'(-t)dt =$

$\underset{\text{subst.}}{=} \left|\begin{matrix} -t = u \\ dt = -du \end{matrix}\right|$ $= - \int\limits_b^a \vec{f}(\vec{r}(u))\cdot\vec{r}\,'(u)(-du) = \int\limits_b^a \vec{f}(\vec{r}(u))\vec{r}\,'(u)du =$

$t = -b \rightarrow u = b$

$t = -a \rightarrow u = a$

$$= - \int\limits_a^b \vec{f}(\vec{r}(u))\cdot\vec{r}\,'(u)du = \underline{- \int\limits_{\vec{K}} \vec{f} d\vec{r}} \text{ (cbd)}$$

b) $\displaystyle\int\limits_{\vec{K}} x\,dx + y\,dy + z\,dz \underset{(*)}{=} \int_0^{2\pi}\big(a\cos t(-a\sin t)+a\sin t\cdot a\cos t + bt\cdot b\big)dt$

$\displaystyle = b^2\int_0^{2\pi} t\,dt = b^2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \underline{2\pi^2 b^2}$

(*) tj: $\vec{f}(x,y,z) = (x,y,z)$ a
kde $\vec{K}$ (šroubovice): $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $a>0, b>0$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$
$x' = -a\sin t$, $y' = a\cos t$, $z' = b$

(orientace je dána parametrizací)

c) $\displaystyle I = \int\limits_{\vec{K}} (y^2+2xy)\,dx + (x^2+2xy)\,dy$, kde křivka $\vec{K}_i$, $i=1,2,3$
má: p. b. $K = [0,0]$
k. b. $K = [1,1]$

a 1) $\underline{\vec{K}_1 \text{ – úsečka}}$: $x(t) = t$; $x' = 1$
$y(t) = t$; $y' = 1$, $t\in\langle 0,1\rangle$

2) $\underline{\vec{K}_2 \text{ – oblouk paraboly } y^2 = x}$, tj. parametrizace (např.)
$x(t) = t^2$
$y(t) = t$, $t\in\langle 0,1\rangle$, $x'(t) = 2t$
$y'(t) = 1$

3) $\underline{\vec{K}_3 \text{ – oblouk paraboly } y = x^2}$, tedy lze parametrizovat
$x(t) = t$
$y(t) = t^2$, $t\in\langle 0,1\rangle$, $x'(t) = 1$
$y'(t) = 2t$

a $\underline{\text{navíc} \quad 4)\ \vec{K}_4 \text{ – kružnice}}$ $x(t) = R\cos t$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$, $x'(t) = -R\sin t$
$y(t) = R\sin t$ $(R>0)$, $y'(t) = R\cos t$

a označíme I_j: integrál dané funkce $\vec{f}(x,y)$ po K_j „$j = 1, \dots, 4$“:

$$\underline{I_1} = \int_0^1 \left[(t^2+2t^2) + (t^2+2t^2)\right]dt = \int_0^1 6t^2 dt = \left[6\cdot\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \underline{2}$$

$$\underline{I_2} = \int_0^1 \left[(t^2+2t^3)2t + (t^4+2t^3)\right]dt = \int_0^1 (4t^3+5t^4)dt = \left[t^4+t^5\right]_0^1 = \underline{2}$$

$$\underline{I_3} = \int_0^1 \left[(t^4+2t^3) + (t^2+2t^3)\cdot 2t\right]dt = \int_0^1 (5t^4+4t^3)dt = \underline{2}$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \left[(R^2\sin^2 t + 2R^2\sin t\cos t)(-R\sin t) + (R^2\cos^2 t + 2R^2\sin t\cos t)R\cos t\right]dt =$$

$$= R^3 \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t - 2\sin^2 t\cos t + \cos^3 t + 2\sin t\cos^2 t)dt = 0$$

(např. $= R^3 \int_0^{2\pi} -(1-\cos^2 t)\sin t - 2\sin^2 t\cos t + (1-\sin^2 t)\cos t + 2\sin t\cos^2 t)dt =$

$$= R^3 \int_0^{2\pi} (3\cos^2 t\sin t - 3\sin^2 t\cos t - \sin t + \cos t)dt =$$

$$= R^3 \left[-(\cos^3 t + \sin^3 t) + \cos t + \sin t\right]_0^{2\pi} = 0$$)

To, že $\int_{K_i} \vec{f}\,d\vec{r} = 2$, $i = 1,2,3$ a $\int_{K_4} \vec{f}\,d\vec{r} = 0$ není „náhoda", je to příklad vektorového pole, které se nazývá potenciální, nebo konzervativní, nebo též nevírové v R^2, a pro takové pole křivkový integrál nezávisí" na cestě (tj: křivce, přes kterou integrujeme), „a integrál po uzavřené křivce je roven nule – probereme v příští přednášce".

A nyní (slíbené) vyšetření existence $\int_K f\,ds$ a $\int_{\vec{K}} \vec{f}\,d\vec{r}$, a jejich vlastnosti:

<u>Existence</u>: „dána" vlastnostmi křivky K i funkcí f, $\vec{f}$,
(a je „vidět" ze vzorců pro výpočet integrálů křivkových)

a) $$\int_K f\,ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt \quad ; \quad X = \vec{r}(t),\ t \in \langle a, b\rangle \text{ – parametrizace } K$$

K nechť je měřitelná křivka
(spec. hladká, oblouk, po částech hladká),

pak 1) $\int_K f\,ds$ existuje $\Rightarrow$ f je omezená na křivce K

(podmínka nutná)

2) f je spojitá na K, (K měřitelná) $\Rightarrow$ $\int_K f\,ds$ existuje;

3) f je spojitá na $K \setminus M$, M konečná, a f omezená na K (K – měřitelná) $\Rightarrow$ $\int_K f\,ds$ existuje

(podmínky postačující)

b) A pro $\int_{\vec{K}} \vec{f} \cdot d\vec{r}$ „totéž" pro funkci $\vec{f}(X) \cdot \vec{\tau}(X)$ na K
($\vec{\tau}(X)$ – jednotkový tečný vektor ke K v bodě $X \in K$)
(jako pro f u $\int_K f\,ds$).

Vlastnosti křivkového integrálu

a) integrál skalární funkce : (předpokládáme, že integrály existují)

linearita: $\int_K (\alpha f + \beta g)\, ds = \alpha \int_K f\, ds + \beta \int_K g\, ds$

$\alpha, \beta \in R$ libovolná

uspořádání: $f \leqq g$ na $K \Rightarrow \int_K f\, ds \leqq \int_K g\, ds$

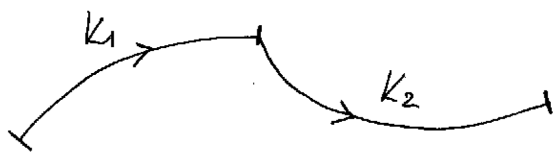
a odtud i věta o střední hodnotě:

je-li f spojitá na K, a $s = \int_K ds$ (délka K), pak existuje bod $\tilde{X} \in K$ tak, že $\frac{1}{s}\int_K f\, ds = f(\tilde{X})$.

aditivita $K = K_1 \cup K_2$, $\int_K f\, ds$ ex. $\Rightarrow$ ex. $\int_{K_i} f\, ds$, $i = 1, 2$

a když uvažujeme K_1, K_2 takové, že $K_1 \cap K_2$ je jednobodový a (už bylo „dříve")

K :



(a $\vec{K}$ orientujeme tak, že k.b. $\vec{K_1}$ = p.b. $\vec{K_2}$),

pak platí: $\int_K f\, ds = \int_{K_1} f\, ds + \int_{K_2} f\, ds$

a pro integrál vektoru: $(\vec{K} = \vec{K}_1 \dotplus \vec{K}_2)$

aditivita: $\int_{\vec{K}} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{K}_1} \vec{f}\, d\vec{r} + \int_{\vec{K}_2} \vec{f}\, d\vec{r}$

<u>značíme:</u> $\int\limits_{\vec{K}} \vec{f}\,d\vec{r}$ existuje $\Rightarrow$ $\int\limits_{\dot{-}\vec{K}} \vec{f}\,d\vec{r}$ existuje a platí

$$\int\limits_{\dot{-}\vec{K}} \vec{f}\,d\vec{r} = - \int\limits_{\vec{K}} \vec{f}\,d\vec{r}$$ („spočítali" jsme tolo – máme tedy i důkaz")

A linearita pro křivkový integrál vektoru, jež známe, opět platí:

$$\int\limits_{\vec{K}} (\alpha\vec{f} + \beta\vec{g})\,d\vec{r} = \alpha \int\limits_{\vec{K}} \vec{f}\cdot d\vec{r} + \beta \int\limits_{\vec{K}} \vec{g}\cdot d\vec{r}, \quad \alpha,\beta \in R$$

(za předpokladu, že existují $\int\limits_{\vec{K}} \vec{f}\cdot d\vec{r}$ i $\int\limits_{\vec{K}} \vec{g}\cdot d\vec{r}$)

<u>Uveďme na závěr „přednášky" ještě jeden příklad:</u>

Je dáno rovinné vektorové pole v $R^2 \setminus \{[0,0]\}$:

$$\vec{f}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

a spočítejme křivkový integrál tohoto pole po kladně orientované kružnici o středu v počátku a poloměru $R>0$, tj. po křivce K, jejíž parametrizace je

$$\vec{K}_R: \; X = \vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

a orientace je dána parametrizací:

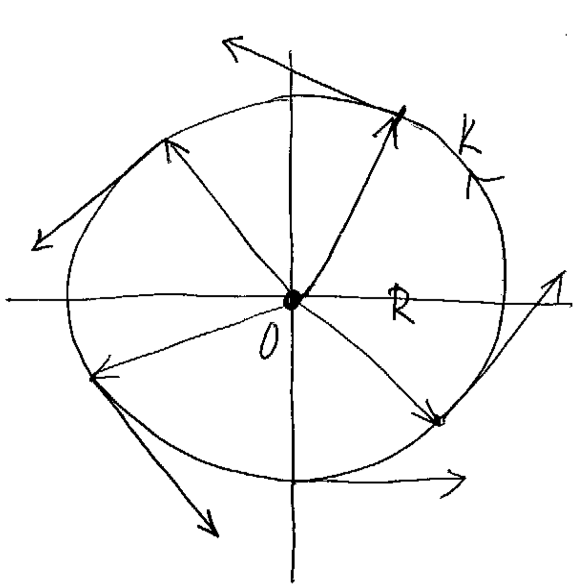
$$\vec{r}\,'(t) = (-R\sin t, R\cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\int\limits_{\vec{K}_R} \vec{f}\,d\vec{r} = \int\limits_{\vec{K}_R} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{R\sin t}{R^2} \cdot (-R\sin t) + \frac{R\cos t}{R^2} \cdot R\cos t \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = \underline{2\pi}$$

Práce pole $\vec{f}$ v našem příkladu nezávisí na poloměru kružnice (se vzdáleností bodu $X[x,y]$ od počátku se velikost vektoru $\vec{f}$ zmenšuje – tak „šikovně") – toto je příklad užitečný pro příští přednášku, a zkusme si ještě toto pole $\vec{f}$ „představit" graficky: vektor $\vec{f}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ je kolmý k vektoru (x,y) v bodě (x,y) kružnice, tedy je tečný ke kružnici v bodě (x,y):



a na kružnici o poloměru $R>0$ má velikost

$$\|\vec{f}(x,y)\| = \sqrt{\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}} = \frac{1}{R}$$

– pole $\vec{f}$ představuje „vír" kolem počátku („možná" představa)